



Fermeture collisionnelle des équations multi-fluides

M. Raghunathan¹, Y. Marandet¹, H. Bufferand², G. Ciruolo², Ph. Ghendrih², P. Tamain², and E. Serre³

¹Aix-Marseille Univ., CNRS, PIIM, Marseille, France

²IRFM-CEA, F-13108 Saint-Paul-Lez-Durance, France

³Aix-Marseille Univ., CNRS, ECM, M2P2, Marseille, France

$$\sum_{\bar{r}\bar{l}} A^{pq\bar{r}\bar{l},m} \bar{g}^{2\bar{r}} \cos^{\bar{l}} \chi = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r_2=0}^r \sum_{r_3=0}^{r-r_2} \sum_{r_4=0}^{r-r_2-r_3} \bar{g}^{2r} L^m \times$$

$$\times \frac{(p+q+r_4-r_3+\frac{3}{2})_{p+q+r_4-r_3-r}}{(r-r_2-r_3-r_4)! r_2! r_3! r_4! (q-r_2-r_3)! (p+r_2+r_4-r)!} \times$$

$$\times (N_s)^{r_2} (N_t)^{r_3} (N_{st})^{r_4} (N_1)^{r-r_2-r_3-r_4} (-D_s)^{q-r_2-r_3} (-D_t)^{p+r_2+r_4-r}$$

Quelles équations fluides utiliser en présence d'impuretés ?

- Projet initié dans le cadre du développement de SOLEDGE3X-EIRENE
- Pour un plasma d'hydrogène pur, équations de Braginskii
- Pour un plasma multi-composante, équations obtenues par la fermeture de Zhdanov (cf. SOLPS-ITER, Rhozansky et al., force de friction dans un mélange D-T)

TRANSPORT
PROCESSES IN
MULTICOMPONENT
PLASMA

V.M. ZHDANOV

CRC Press
Taylor & Francis Group

- Spécificité de SolEdge par rapport à SOLPS-ITER :
une équation d'énergie par espèce, termes d'échanges à obtenir
- Gros travail d'implémentation (cf. présentation P. Tamain)

Caveat : pas simple de vérifier les résultats ...

et s'il y avait des erreurs ? Quelles sont vraiment les hypothèses ?

Même questionnement en parallèle à l'IPP (S. Makarov) en lien avec le groupe de Zhdanov.

Formulation cinétique du problème – lien avec les « observables »

➤ Le point de départ: l'équation de Vlasov-Boltzmann

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} f_\alpha = \sum_{\beta} J_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \quad \text{Collisions}$$

$$\mathbf{F}_\alpha = Z_\alpha e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B})$$

$$J_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \iint (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g \sigma_{\alpha\beta}(g, \chi) d\Omega d\mathbf{v}_\beta$$

Section efficace de collision

➤ Intégration sur $G(V)$ pour obtenir les moments (densité, qtt mouvement, ...)

$$\int G_\alpha^{mn} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} f_\alpha \right) d\mathbf{v}_\alpha = \sum_{\beta} \int G_\alpha^{mn} J_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) d\mathbf{v}_\alpha$$

Fermeture des équations fluides (conservation)

- En spécifiant $G=1$, $G=v_{\alpha i}$, $G=v_{\alpha i}^2$ on obtient les équations de conservation pour les particules, la qtt mouvement et l'énergie ($w_\alpha = u_\alpha - u$, $u = \sum n_\alpha u_\alpha / \sum n_\alpha$)

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} + \rho_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0.$$

$$\frac{d}{dt} \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p_\alpha + \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_\alpha - n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha^* \rangle = \mathbf{R}_\alpha^{10}.$$

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} (n_\alpha k T_\alpha) + \frac{5}{2} n_\alpha k T_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha + \boldsymbol{\pi}_\alpha : \nabla \mathbf{u} - n_\alpha \mathbf{w}_\alpha \cdot \langle \mathbf{F}_\alpha^* \rangle = R_\alpha^{01}.$$

- Ces équations font intervenir d'autres moments de f_α et ainsi que les forces R^{10} et les échanges d'énergie à travers les collisions qui doivent être exprimés en fonction de $\rho_\alpha, w_\alpha = u_\alpha - u, T_\alpha$

Méthode de Grad-Zhdanov

- On cherche f_α sous la forme d'une Maxwellienne x un polynôme en vitesse bien choisi
- On calcule les intégrales de l'opérateur de collision (Ragunathan, PPCF 2021)

$$\mathbf{R}_\alpha^{10} = \sum_{\beta} G_{\alpha\beta}^{(1)} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) + \sum_{\beta} \gamma_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^{(2)} \left(\frac{\mathbf{h}_\alpha}{\gamma_\alpha p_\alpha} - \frac{\mathbf{h}_\beta}{\gamma_\beta p_\beta} \right) + \dots$$

Force de friction $h_\alpha =$ flux de chaleur

- On **simplifie** l'équation pour h_α (forte collisionnalité) ce qui conduit à pouvoir exprimer h_α en fonction de w_α et ∇T_α . On retrouve la force thermique !
- Les moments d'ordre supérieurs sont supposés **nuls**.
- On obtient différentes fermetures selon le nombre de moments:

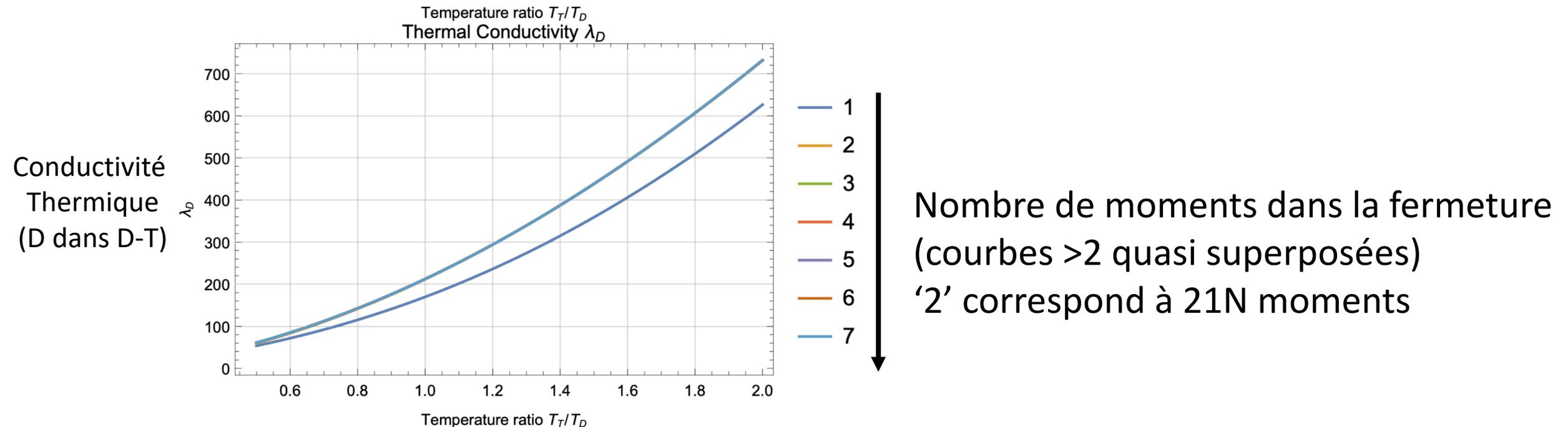
$$\rho_\alpha, w_\alpha = u_\alpha - u, T_\alpha \quad \text{'5N moments'}$$

$$\rho_\alpha, w_\alpha = u_\alpha - u, T_\alpha, h_\alpha \quad \text{'13N moments', '21N moments', '27N moments', etc ...}$$

Pose la question de la **convergence** ... combien de moments nécessaires ?

La fermeture de Grad-Zhdanov revisitée (1)

- Redérivation complète (non publiée dans son intégralité, de fait), quelques erreurs dans l'édition anglaise du livre identifiées (conséquences mineures)
- L'hypothèse $T_\alpha \sim T_\beta$ est implicitement utilisée dans le calcul des intégrales de l'opérateur de collision. **Cette restriction a pu être levée** (Raghunathan, PPCF 2021) et la fermeture généralisée (Raghunathan, PPCF 2022)

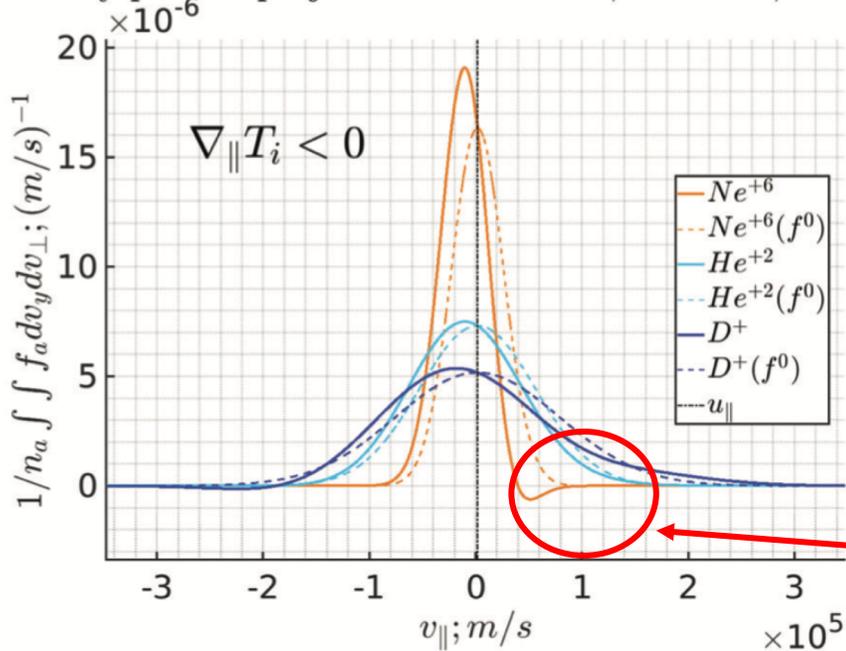


La fermeture de Grad-Zhdanov revisitée (2)

- A l'aide de Mathematica la **convergence** du schéma de fermeture a pu être établie pour pour la première fois : au delà de 21N moments les corrections sont mineures

- De plus, la façon dont le problème est posé impose $|\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}| \ll \left(\frac{kT_\alpha}{m_i}\right)^{1/2}$

Velocity parallel projection distribution; R :5.37m; Z :-3.7m



- Travail en cours : lever cette restriction (Maxwellienne centrée en u_α et non u)

Bien avancé mais exercice difficile

- Une fois ce problème traité, implémentation de la fermeture la plus pertinente ou de plusieurs options dans SolEdge3X